期中考试

试卷共 3 页，共 16 题，满分 30 分.

判断题：判断下列陈述的正误，无需写出证明.

1. (1 分) 对任何映射 $\varphi : X \to Y$，任意 $A, B \subseteq X$，$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$.
2. (1 分) 在一阶自然演绎系统中，x, y, z 是变元，A 和 B 是谓词符. 对公式 φ, ψ，如果 $\vDash (\neg\varphi) \leftrightarrow \psi$，那么称 ψ 是 φ 的一个否定. 设 $\varphi = (\forall x \exists y (A(x,y) \to (\exists z) B(x,y,z)))$.

   判断 $\psi_1 = (\forall x \exists y (A(x,y) \to (\forall z) \neg B(x,y,z)))$ 是否是 φ 的一个否定.
3. (1 分) 判断 $\psi_2 = (\exists x \forall y (A(x,y) \to (\forall z) \neg B(x,y,z)))$ 是否是上一问 φ 的一个否定.
4. (1 分) 循环群的子群一定是循环群.
5. (1 分) S_4 有 9 阶子群.
6. (1 分) 群 $G_1 \times G_2$ 的每一个子群都具有 $H_1 \times H_2$ 的形式，其中 $H_1 \leq G_1$，$H_2 \leq G_2$.
7. (1 分) 对任意 m, n，$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 是循环群.
8. (1 分) 若 $\varphi : G \to H$ 是一个群同态，且 $E \trianglelefteq H$，则 $\varphi^{-1}(E) \trianglelefteq G$.
9. (1 分) 设 $\varphi : R \to R'$ 是两个交换幺环间的**满**同态，如果 R' 是整环，那么 R 是整环.
10. (1 分) 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$\mathbb{E}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个扩域满足 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$ 且 $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = 5$, 则 $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha^2)$.

解答题：请选择 4 道作答.

11. (5 分) 记号 Y^X 表示从 X 到 Y 的映射的集合. 用 $\mathrm{card}(X)$ 来表示集合 X 的势（基数，cardinal）.
    (1) 证明：不论将 2^X 理解为 X 的幂集还是 X 到 $2 = \{0, 1\}$ 的映射的集合，他们表示的集合是等势的.
    (2) 证明：$\mathrm{card}((Z^Y)^X) = \mathrm{card}(Z^{Y \times X})$ 对任意集合 X, Y, Z 成立.
    (3) 证明：$\mathrm{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$，因此无穷实数列和实数一样多.
12. (5 分) 考虑命题逻辑的自然演绎系统，设 φ, ψ 是任意公式. 证明：

$$\varphi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi.$$

13. (5 分) 考虑通常的命题逻辑自然演绎系统，作为简化，连接词只有 $\to$，命题字母的集合为 P. 将推导规则除去 RAA，我们就得到了直觉主义命题逻辑，推理符号为 $\vdash_i$. 本题证明在经典的语义 $\vDash$ 下，直觉主义命题逻辑是不完全的（incomplete），即存在公式 ϕ，$\vDash \phi$ 但 $\nvdash_i \phi$.

为此，我们将会给一种新的语义 $\Vdash$. 考虑一个偏序集 $(W, \geq)$，每一个 $w \in W$ 上都被赋予一些命题字母 $p, q, \ldots$，由映射 $V: W \to 2^P$ 给出，满足：如果 $p \in V(w)$ 且 $v \geq w$，那么 $p \in V(v)$. 语义 $\Vdash$ 可以被归纳定义为：

- $(W, V, w) \Vdash p$ 当且仅当 $p \in V(w)$.
- $(W, V, w) \Vdash \perp$ 永远不成立.
- $(W, V, w) \Vdash \psi \to \phi$ 当且仅当对所有 $v \geq w$，如果 $(W, V, v) \Vdash \psi$，那么 $(W, V, w) \Vdash \phi$.

符号 $\Vdash \phi$ 表示 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 对所有 W, V, w 成立.

(1) 证明：如果 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 且 $v \geq w$，那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

(2) 证明 soundness 定理：对任意公式 ϕ，如果 $\vdash_i \phi$，那么 $\Vdash \phi$.

(3) 已知 $\Vdash$ 有完全性定理：对任意公式 ϕ，$\vdash_i \phi \iff \Vdash \phi$，证明：对公式 $\phi: \neg\neg p \to p$，$\vDash \phi$ 但 $\nvdash_i \phi$，因而在经典语义 $\vDash$ 下，直觉主义命题逻辑是不完全的.

提示：考虑两个元素的集合 W 即可.

14. (5 分) 设 p 是素数. 证明：

(1) 如果 $x \equiv y \pmod{p}$，那么 $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$.

(2) 如果 $x \equiv y \pmod{p^k}$，其中 k 是正整数，那么对任意正整数 r，$x^{p^r} \equiv y^{p^r} \pmod{p^{k+r}}$.

15. (5 分) 给定一个正四面体，按照某种特定方式对它整体旋转（即特殊正交变换，可以保角度的旋转，但没有镜面操作）的时候，它会与原来的正方体重合，尽管点和面可能换了位置. 正四面体的“基本旋转”有两种：以正四面体顶点及其对面中心连线为轴，顺时针旋转 120 度（记为 α）；以正四面体两条对棱中心连线为轴，旋转 180 度（记为 β）. 可以证明，保持正四面体占位不变的旋转都是由这两种旋转生成的. 正四面体的旋转构成了一个群，记为 R.

(1) 证明：$R \cong A_4$，即四阶交错群（也被记作 Alt(4)）. 因此 A_4 可以被视为正四面体的旋转群.

提示：对正四面体顶点编号 $1, 2, 3, 4$，给出 α, β 所对应的 A_4 中的元素，证明他们生成了 A_4.

(2) 写出 A_4 的 class equation，并解释它的几何意义（即对应的旋转类型）.

16. (5 分) 考虑 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中的多项式 $f(x) = x^9 + x^2 + 1$，$\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ 是否是域？请计算说明.

附录：自然演绎系统推导规则　考虑只包含连接词 $\to$ 和 $\wedge$ 的命题逻辑，它的自然演绎系统（natural deduction system）包括如下内容：

- 命题逻辑的公式，包括永假常元 $\perp$.
- 没有公理.
- 推导规则如下：

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I \qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to E$$

$$\frac{\perp}{\phi} \perp \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\phi}\ \mathrm{RAA}$$

  其中，横线上面是前提，下面是推导的结果（结论），横线右边是规则的名字（例如 $\wedge I$）. 省略号表示省略的推导步骤；方括号表示假设该公式已经推出，在此基础上进行推理.
- $\neg\phi$ 是 $\phi \to \perp$ 的缩写.