概率方法

不提交.

1. (8 分) 用 $G(2n,p,q)$ 表示如下的随机图的分布：点集为 $V=\{1,2,\ldots,2n\}$. 选取随机的 $S^*\subseteq V$ 且 $|S^*|=n$. 这样点集被划分为了两个大小相同的块 S 和 $V\setminus S$. 对于任意两个点 (u,v)，如果 u,v 在同一个块中（$u,v\in S^*$ 或者 $u,v\notin S^*$），那么 u,v 之间以概率 p 有边相连；如果 u,v 在不同的块中，那么 u,v 之间以概率 q 有边相连.

   考虑高度稀疏的场景. 令 $p=\alpha/n$，$q=\beta/n$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 是常数. 请问是否可以依据图本身的信息对 S^* 进行一个非平凡的估计. 具体来说，是否存在一个算法 $\mathcal{M}$ 和常数 $c>0$ 使得

   $$\Pr\left[|\hat{S}|=n\wedge\frac{|\hat{S}\cap S^*|}{n}\notin(1/2-c,1/2+c)\,\middle|\,\begin{matrix}G\leftarrow G(2n,\alpha/n,\beta/n)\\ \hat{S}\leftarrow\mathcal{M}(G)\end{matrix}\right]=1-O(1/n).$$

   答案显然依赖于 (α,β) 的取值. 请找到一个尽量大的 (α,β) 的范围使得可以对 S^* 进行上述的非平凡估计.

   提示：当 $(\alpha-\beta)^2<\alpha+\beta$ 时，不存在任何算法可以非平凡地估计 S^* [Mossel-Neeman-Sly 2012].

2. (8 分) 有若干集合 $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$，满足 $\forall i,j\ \ A_i\cap B_j=\varnothing \iff i=j$. 证明

   $$\sum_i\frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}}\le 1.$$

3. (5 分) 考虑如下生成社交网络过程：初始时只有一人；每当一个新人加入时，会随机关注一个人，被关注概率正比于当前被关注次数加上 β. 这里 $\beta>0$ 是一个常数. 请问当网络中有 n 人时，第 k 个加入网络的人的被关注次数的期望约是多少.

4. (8 分) 如果集合 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 满足

   $$\forall\text{distinct } a,b,c\in S,\ \Delta(a,b)+\Delta(b,c)>\Delta(a,c),$$

   我们称 S 是不共线的. 这里 Δ 表示汉明距离（Hamming distance）.

   (1) 证明，对所有足够大的 n，存在不共线的 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 满足 $|S|\ge 1.01^n$.

   (2) 证明，对所有足够大的 n，任何不共线的 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 都满足 $|S|\le 1.99^n$.