计数

请在 11 月 28 日课前提交纸质作业.

1. (4 分) 给定一个函数 $f: 2^{[n]} \to \mathbb{R}$. 证明如果定义 $\tilde{f}(S) = \sum_{T \supseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T \setminus S|} \tilde{f}(T).$$

Remark: 对于一组有限集 $A_1, \ldots, A_n$ 和 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 如果定义

$$f(S) = |\{x \in \Omega | \forall i \in [n], x \in A_i \iff i \in S\}|,$$

那么题目结论可以推出容斥原理.

Remark: 对称地，如果定义 $\hat{f}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \hat{f}(T).$$

2. (10 分) 令 $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个有限域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 矩阵. 定义 M 是一个 MDS（maximum distance separable）矩阵，当且仅当对任何不同的 $x, x' \in \mathbb{F}^n$，(Mx, x) 和 (Mx', x') 至少在 $n+1$ 个位置不同. 不难证明以下命题等价，

   a. M 是 MDS 矩阵；

   b. M 可逆，且 M^{-1} 是 MDS 矩阵；

   c. M 的任何子矩阵满秩；

   d. 考虑方程 $(y_1, \ldots, y_n) = M(x_1, \ldots, x_n)$，任意固定 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 中的 n 个变量，方程仍有解；

   e. 考虑方程 $(y_1, \ldots, y_n) = M(x_1, \ldots, x_n)$，任意固定 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 中的 n 个变量，方程有唯一解.

   由等价命题 c 可以看出，当 $|\mathbb{F}|$ 足够大时，大部分矩阵都是 MDS 矩阵. 因此，可以说 MDS 刻画了“一般的”矩阵.

   (1) 若 $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个 MDS 矩阵，求出满足 $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = M(x_1, \ldots, x_n)$ 且 $x_1, \ldots, x_{2n}$ 均不为 0 的解的个数.

   提示：对每个集合 $S \subseteq [2n]$，计算满足 $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = M(x_1, \ldots, x_n)$ 且 $x_i = 0 \iff i \in S$ 的解的个数.

   (2) 记上问求出的解的个数为 L. 证明

$$\left| L - \frac{(|\mathbb{F}| - 1)^{2n}}{|\mathbb{F}|^n} \right| \leq 2^{2n}.$$

3. (8 分) 令 t_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的个数. 不妨令 $t_0=0$. 其初始几项为

$$t_0=0,\quad t_1=1,\quad t_2=2,\quad t_3=9,\quad t_4=64,\ldots$$

(1) 求出 t_n 的通项公式.

提示:

(2) 考虑 t_n 的 EGF $T(x)=\sum_i \frac{t_n}{n!}x^n$. $T(x)$ 是一个简洁的方程的解, 请找到这个 (超越) 方程.

4. (4 分) 用 $C\geq 6$ 种颜色对立方体进行面染色, 要求相邻面的颜色不能相同. 求有多少种不同的染色方案. 两个染色方案等价，当且仅当其中一种方案可以经过旋转 (不包括镜像) 转化为另一种方案.

5. (8 分) 考虑从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的长度为 $2n$ 的路径 (每次向上或向右走一步)

$$\vec{p}=[(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_{2n},y_{2n})]$$

其中 $(x_0,y_0)=(0,0),(x_{2n},y_{2n})=(n,n)$, $\forall 0<i\leq 2n$ $(x_i-x_{i-1},y_i-y_{i-1})\in\{(0,1),(1,0)\}$. 称路径 $\vec{p}$ 不降，如果 $\forall 0\leq i\leq 2n$, $y_i\geq x_i$. 将一条不降路径沿着 $(0,n)(n,0)$ 的连线翻转，可以得到一条不降路径. 计算考虑这种翻转后，仍然不等价的不降路径数目. 严格来说，称路径 $\vec{p}=[(x_0,y_0),\cdots,(x_{2n},y_{2n})]$ 和路径 $\vec{q}=[(x'_0,y'_0),\cdots,(x'_{2n},y'_{2n})]$ 等价，如果

$$\forall 0\leq i\leq 2n,\ x_i+y'_{2n-i}=y_i+x'_{2n-i}=n.$$

问有多少个不降路径的等价类?

6. (10 分) 令 $\mathbb{F}$ 是一个有限域. 考虑对域中的每个数用 C 种颜色之一染色. 每个染色方案可以表示为一个映射 $f:\mathbb{F}\to C$. (这里 $C:=\{0,1,\ldots,C-1\}$.) 考虑在仿射变换下仍然不同的染色方法数. 严格来说, 我们说两个染色方案 f,f' 是等价的, 当且仅当存在一个 $\mathbb{F}$ 上的可逆仿射映射 $g:x\mapsto ax+b$ (这里 $a\in\mathbb{F}\setminus\{0\},b\in\mathbb{F}$)，使得 $f'=f\circ g$.

当 $|\mathbb{F}|=7^5=16807=2\times 3\times 2801+1$，请计算在仿射变换下仍然不同的染色方法数?

提示：不妨先考虑一般的有限域 $|\mathbb{F}|=p^k$. 对任何有限域 $\mathbb{F}$，其乘法群 $\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 是循环群.

7. (8 分) 考虑 n 个无差异点构成的圈，每个点上可以标记 $C:=\{0,1,\ldots,C-1\}$ 中的一个整数，经过旋转 (不包括镜面) 可重合的标号方式视为同一种. 选以下问题中的 2 个作答即可.

(1) 如果要求相邻两个点的奇偶性不同，有多少种不同的标号方案? ($n=30$, $C=3$)

(2) 如果要求所有点标的和为偶数，有多少种不同的标号方案? ($C=3$, $n=p^2$ 为奇素数平方)

(3) 如果要求相邻两个点的标号不同，有多少种不同的标号方案? ($n=30$)

(4) 如果要求所有点的标号和为 $C-1$ 的倍数，有多少种不同的标号方案? (n 为素数)