计数

参考答案

1. (4 分) 给定一个函数 $f: 2^{[n]} \to \mathbb{R}$. 证明如果定义 $\tilde{f}(S) = \sum_{T \supseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T \setminus S|} \tilde{f}(T).$$

Remark: 对于一组有限集 $A_1, \ldots, A_n$ 和 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 如果定义

$$f(S) = |\{x \in \Omega | \forall i \in [n], x \in A_i \iff i \in S\}|,$$

那么题目结论可以推出容斥原理.

Remark: 对称地，如果定义 $\hat{f}(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \hat{f}(T).$$

解

$$\begin{aligned}
\sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T \setminus S|} \tilde{f}(T) &= \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T \setminus S|} \sum_{U \supseteq T} f(U) \\
&= \sum_{U \supseteq S} f(U) \sum_{T \text{ s.t. } U \supseteq T \supseteq S} (-1)^{|T \setminus S|} \\
&= \sum_{U \supseteq S} f(U) \sum_{T \subseteq U \setminus S} (-1)^{|T|} \\
&= \sum_{U \supseteq S} f(U) \begin{cases} 1, & \text{if } U = S, \\ 0, & \text{if } U \supsetneq S. \end{cases} \\
&= f(S).
\end{aligned}$$

2. (10 分) 令 $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个有限域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 矩阵. 定义 M 是一个 MDS（maximum distance separable）矩阵，当且仅当对任何不同的 $x, x' \in \mathbb{F}^n$，(Mx, x) 和 (Mx', x') 至少在 $n+1$ 个位置不同. 不难证明以下命题等价，

   a. M 是 MDS 矩阵；

   b. M 可逆，且 M^{-1} 是 MDS 矩阵；

   c. M 的任何子矩阵满秩；

   d. 考虑方程 $(y_1, \ldots, y_n) = M(x_1, \ldots, x_n)$，任意固定 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 中的 n 个变量，方程仍有解；

e. 考虑方程 $(y_1,\dots,y_n)=M(x_1,\dots,x_n)$，任意固定 $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ 中的 n 个变量，方程有唯一解.

由等价命题 c 可以看出，当 $|\mathbb{F}|$ 足够大时，大部分矩阵都是 MDS 矩阵. 因此，可以说 MDS 刻画了“一般的”矩阵.

(1) 若 $M\in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个 MDS 矩阵，求出满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $x_1,\dots,x_{2n}$ 均不为 0 的解的个数.

提示：对每个集合 $S\subseteq[2n]$，计算满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $x_i=0 \iff i\in S$ 的解的个数.

(2) 记上问求出的解的个数为 L. 证明

$$\left|L-\frac{(|\mathbb{F}|-1)^{2n}}{|\mathbb{F}|^n}\right|\le 2^{2n}.$$

解

(1) 对每个集合 $S\subseteq[2n]$，定义 $f(S)$ 为计算满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $x_i=0\iff i\in S$ 的解的个数. 定义 $\tilde f(S)=\sum_{T\supseteq S}f(T)$，那么 $\tilde f(S)$ 就是满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $i\in S\implies x_i=0$ 的解的个数. 注意到，$\tilde f(S)$ 就是线性空间

$$V_S:=\left\{(x_1,\dots,x_{2n})\;\middle|\;(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n),\forall i\in S,x_i=0\right\}$$

的大小. 计算线性空间的大小，只需计算其维度即可. $V_\varnothing$ 的维度是 n. S 中的每增加一个元素，代表增加了一个线性条件，维度最多减少 1. 也就是说

$$\dim V_S\ge \dim V_{S\cup\{i\}}\ge \dim V_S-1.$$

另一方面，根据 M 是 MDS 的性质 e，我们知道，当 $|S|\ge n$ 时，V_S 的维度等于 0. 综合 $V_\varnothing$ 和 $V_S,|S|\ge 0$ 的情况，我们有

$$\dim V_S=\begin{cases}n-|S| & \text{if } |S|<n\\ 0 & \text{if } |S|\ge n\end{cases}\qquad \tilde f(S)=\begin{cases}|\mathbb{F}|^{n-|S|} & \text{if } |S|<n\\ 1 & \text{if } |S|\ge n\end{cases}=|\mathbb{F}|^{\max(n-|S|,0)}.$$

第一问要求的就是 $f(\varnothing)$ 的值. 根据第 1 题的结论，

$$f(\varnothing)=\sum_S(-1)^S\tilde f(S)=\sum_S(-1)^S|\mathbb{F}|^{\max(n-|S|,0)}=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i|\mathbb{F}|^{\max(n-i,0)}\binom{2n}{i}.$$

(2) 定义函数 $\tilde g$

$$\tilde g(S):=|\mathbb{F}|^{n-|S|}.$$

这里 $\tilde g$ 的定义使得 $|\tilde g(S)-\tilde f(S)|\le 1$ 对任何 S 都成立；而 g 由 $g(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T\setminus S|}\tilde g(T)$ 自然地诱导出：

$$g(S):=(|\mathbb{F}|-1)^{2n-|S|}/|\mathbb{F}|^n,$$

这样

$$|f(S)-g(S)| = \left|\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T\setminus S|}(\tilde{f}-\tilde{g})(T)\right| \le \sum_{T\supseteq S}\left|(-1)^{|T\setminus S|}(\tilde{f}-\tilde{g})(T)\right| = \sum_{T\supseteq S} 1 = 2^{2n-|S|}.$$

特别地，当选取 $S=\varnothing$ 时，

$$\left|L-\frac{(|\mathbb{F}|-1)^{2n}}{|\mathbb{F}|^n}\right| = |f(\varnothing)-g(\varnothing)| \le 2^{2n}.$$

3. (8 分) 令 t_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的个数. 不妨令 $t_0=0$. 其初始几项为

$$t_0=0,\quad t_1=1,\quad t_2=2,\quad t_3=9,\quad t_4=64,\ldots$$

(1) 求出 t_n 的通项公式.

提示:

(2) 考虑 t_n 的 EGF $T(x)=\sum_i \frac{t_n}{n!}x^n$. $T(x)$ 是一个简洁的方程的解, 请找到这个 (超越) 方程.

解

(1) $t_n = n^{n-1}$.

设标号集合为一个全序集 S. 根据提示, 考虑这样一个过程, 每次删除标号最小的叶子, 并记录被删除点的父节点. 这样定义了一个从带标号有根树到 S^{n-1} 的映射. 将这个映射记作 ϕ_S.

接下来, 我们证明 ϕ_S 是一个双射. 也就是给定任意序列 $(a_1,\ldots,a_{n-1})\in S^{n-1}$, 都存在唯一的原像. 注意到序列中出现的点是所有非叶子节点. 因此 $S\setminus\{a_i\}$ 是所有叶子节点的集合, 这个集合一定非空. 令 b 是集合中的最小值, 那么 b 就是第一个被删除的节点, 且 b 是 a 的孩子.

注意到, 删除 b 后, 剩下的树被 $\phi_{S\setminus\{b\}}$ 映射到 $(a_2,\ldots,a_{n-1})$. 我们归纳地假设当点数更少时 ϕ 是双射, 因此有唯一原像 $\phi^{-1}_{S\setminus\{b\}}(a_2,\ldots,a_{n-1})$. 将 b 添加为 a 的孩子便得到了 $(a_1,\ldots,a_{n-1})$ 的唯一原像.

(2) 令 f_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的森林的个数. 用 $F(x)$ 表示其生成函数.

一颗有根树的根节点有 n 种选择, 删去根节点后得到 $n-1$ 个组成的森林. 因此 $t_n = nf_{n-1}$. 故

$$T(x)=\sum_{n\ge1} t_n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\ge1} nf_{n-1}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\ge1} f_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n\ge0} f_n\frac{x^{n+1}}{n!} = xF(x).$$

另一方面, 一个 n 个点的森林, 是将 n 个点任意分划为若干组, 每组中的点组成一个有根树. 故

$$F(x)=\sum_k \underbrace{\frac{1}{k!}T^k(x)}_{n\text{ 点 }k\text{ 树的森林数目}} = e^{T(x)}.$$

所以 $T(x)=xe^{T(x)}$.

4. (4 分) 用 $C \geq 6$ 种颜色对立方体进行面染色，要求相邻面的颜色不能相同. 求有多少种不同的染色方案. 两个染色方案等价，当且仅当其中一种方案可以经过旋转 (不包括镜像) 转化为另一种方案.

解 立方体旋转群的阶为 24, 各个旋转的不动点个数如下表：

旋转群	个数	不动点个数
不动	1	$C(C-1)(C-2)^2+2C(C-1)(C-2)(C-3)^2$ $+C(C-1)(C-2)(C-3)(C-4)^2$
面心-面心 $\pm 90°$	6	0
面心-面心 $180°$	3	$C(C-1)(C-2)^2$
棱心-棱心 $180°$	6	0
对顶角线 $\pm 120°$	8	0

由 Burnside 引理，非等价方案数

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24}(C(C-1)(C-2)^2+2C(C-1)(C-2)(C-3)^2\\&+C(C-1)(C-2)(C-3)(C-4)^2+3C(C-1)(C-2)^2)\\=&\frac{1}{24}C(C-1)(C-2)(C^3-9C^2+32C-38)\end{aligned}$$

5. (8 分) 考虑从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的长度为 $2n$ 的路径 (每次向上或向右走一步)

$$\vec{p}=[(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_{2n},y_{2n})]$$

其中 $(x_0,y_0)=(0,0),(x_{2n},y_{2n})=(n,n)$, $\forall 0<i\leq 2n$ $(x_i-x_{i-1},y_i-y_{i-1})\in\{(0,1),(1,0)\}$. 称路径 $\vec{p}$ 不降，如果 $\forall 0\leq i\leq 2n$, $y_i\geq x_i$. 将一条不降路径沿着 $(0,n)(n,0)$ 的连线翻转，可以得到一条不降路径. 计算考虑这种翻转后，仍然不等价的不降路径数目. 严格来说，称路径 $\vec{p}=[(x_0,y_0),\cdots,(x_{2n},y_{2n})]$ 和路径 $\vec{q}=[(x'_0,y'_0),\cdots,(x'_{2n},y'_{2n})]$ 等价，如果

$$\forall 0\leq i\leq 2n,\ x_i+y'_{2n-i}=y_i+x'_{2n-i}=n.$$

问有多少个不降路径的等价类?

解 不考虑翻转，不降路径数目为 $\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$.

接下来考虑对翻转不动的不降路径数目. 这等于从 $(0,0)$ 到对角线 (从 $(n,0)$ 到 $(0,n)$ 的连线) 上的任意一点的不降路径的数目. 考虑对角线上任意一点 $(i,n-i)$, 从 $(0,0)$ 到 $(i,n-i)$ 的不降路径的数目为 $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$. 因此对翻转不动的不降路径数目为: $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1})=\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$.

由 Burnside 引理，不降等价类数目 $\frac{1}{2}\left(\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\right)$.

6. (10 分) 令 $\mathbb{F}$ 是一个有限域. 考虑对域中的每个数用 C 种颜色之一染色. 每个染色方案可以表示为一个映射 $f:\mathbb{F}\to C$. (这里 $C:=\{0,1,\ldots,C-1\}$.) 考虑在仿射变换下仍然不同的染色方法数. 严

格来说，我们说两个染色方案 f, f' 是等价的，当且仅当存在一个 $\mathbb{F}$ 上的可逆仿射映射 $g: x \mapsto ax+b$ (这里 $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{F}$)，使得 $f' = f \circ g$.

当 $|\mathbb{F}| = 7^5 = 16807 = 2 \times 3 \times 2801 + 1$，请计算在仿射变换下仍然不同的染色方法数?

提示：不妨先考虑一般的有限域 $|\mathbb{F}| = p^k$. 对任何有限域 $\mathbb{F}$，其乘法群 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ 是循环群.

解　使用 Pólya/Burnside 计数时需要枚举所有的仿射变换 $g: x \mapsto ax + b$，并计算在 g 作用下不变的染色方案数（不动点数）. 枚举 g 时，我们分成几种情况考虑.

- 若 $a = 1, b = 0$：这时 g 就是恒等映射，所有 $C^{|\mathbb{F}|}$ 个染色都在 g 的作用下不变.
- 若 $a = 1, b \neq 0$：在加法运算下，$\mathrm{order}(b) = p$. 仿射变换 g 可以写成 p^{k-1} 个不交的轮换 $(v, v+b, v+2b, \dots, v+(p-1)b)$. 因此有 $C^{p^{k-1}}$ 个染色都在 g 的作用下不变.
- 若 $a \neq 1$：那么 g 共轭于 $g': x \mapsto ax$，因为不难构造 $h: x \mapsto x + c$ 满足 $g = h^{-1} g' h$. 因此考虑 g 作用下不变的染色个数，等价于考虑 g' 作用下不变的染色个数. 显然 0 是 g' 的一个不动点. 剩余的点 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ 构成一个大小为 $M = |\mathbb{F}| - 1$ 循环群，不妨记 α 是群的一个生成元. 那么存在唯一的 $t \in \{1, \dots, M-1\}$ 使得 $a = \alpha^t$.
  - 如果 $\gcd(t, M) = 1$，那么 $a = \alpha^t$ 也是 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ 的一个生成元，这样的 a 有 $\phi(M)$ 个. 这时置换 g' 可以分解成一个不动点 0 和剩余所有数上的轮换. 在 g' 作用下不变的染色数有 C^2 个.
  - 更一般的，如果 $\gcd(t, M) = M/d$ 那么在乘法下 $\mathrm{order}(a) = d$，这样的 a 有 $\phi(d)$ 个. 这时置换 g' 可以分解成一个不动点 0 和 M/d 个形如

    $$(v, av, a^2 v, \dots, a^{d-1} v)$$

    的长度为 d 的轮换. 在 g' 作用下不变的染色数有 $C^{1+M/d}$ 个.

综上，使用 Pólya/Burnside 计数可以得到总染色数为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbb{F}|(|\mathbb{F}|-1)} \left(C^{p^k} + \sum_{b \neq 0} C^{p^{k-1}} + \sum_{a \neq 1} \sum_{b} C^{1+M/\,\mathrm{order}(a)} \right) \\
&= \frac{1}{|\mathbb{F}|(|\mathbb{F}|-1)} \left(C^{p^k} + (p^k - 1) C^{p^{k-1}} + \sum_{\substack{d \mid p^k - 1 \\ d \neq 1}} \phi(d) p^k C^{1 + \frac{p^k - 1}{d}} \right)
\end{aligned}$$

具体到 $|\mathbb{F}| = 7^5 = 2 \times 3 \times 2801 + 1$ 时：

- 对 $g(x) = x$，不动点个数为 C^{16807}.
- 对 $g(x) = x + b$ $(b \neq 0)$，该置换可分解为 $7^4 = 2401$ 个 7-轮换，不动点个数 C^{2401}.
- 对 $g(x) = ax + b$ $(a \neq 1)$，取 $h(x) = x + b \cdot (a-1)^{-1}$ 则 $h \circ g \circ h^{-1}(x) = ax$. 共轭置换的型相同，只要考虑 $g'(x) = ax$ $(a \neq 1)$. 按照 a 在乘法群中的阶 $\mathrm{order}(a)$ 讨论：

order(a)	轮换个数 (包括 1-轮换)	不动点个数	对应 a ($a \neq 1$) 的个数
1	$2 \times 3 \times 2801 + 1$	$C^{16806+1}$	0
2	$3 \times 2801 + 1$	C^{8403+1}	1
3	$2 \times 2801 + 1$	C^{5602+1}	2
2×3	$2801 + 1$	C^{2801+1}	2
2801	$2 \times 3 + 1$	C^{6+1}	2800
2×2801	$3 + 1$	C^{3+1}	2800
3×2801	$2 + 1$	C^{2+1}	2×2800
$2 \times 3 \times 2801$	$1 + 1$	C^{1+1}	2×2800

非等价染色数为

$$\frac{C^{16807}}{16807 \times 16806} + \frac{C^{2401}}{16807} + \frac{C^{8404} + 2C^{5603} + 2C^{2802} + 2800C^7 + 2800C^4 + 5600C^3 + 5600C^2}{16806}.$$

7. (8 分) 考虑 n 个无差异点构成的圈，每个点上可以标记 $C := \{0, 1, \ldots, C-1\}$ 中的一个整数，经过旋转 (不包括镜面) 可重合的标号方式视为同一种. 选以下问题中的 2 个作答即可.

(1) 如果要求相邻两个点的奇偶性不同，有多少种不同的标号方案？($n = 30$, $C = 3$)

(2) 如果要求所有点标的和为偶数，有多少种不同的标号方案？($C = 3$, $n = p^2$ 为奇素数平方)

(3) 如果要求相邻两个点的标号不同，有多少种不同的标号方案？($n = 30$)

(4) 如果要求所有点的标号和为 $C - 1$ 的倍数，有多少种不同的标号方案？(n 为素数)

解 顺时针标记 n 个点为 $0, 1, \cdots, n-1$, 圈上所有旋转变换构成的群为

$$G_n = \{g \mid g(x) = (x + k) \mod n\}.$$

由 Burnside 引理，

$$\text{非等价标号方案数} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{变换 } g \text{ 的满足条件的不动点个数}.$$

(1) 只要考虑变换 $g(x) = x + 2k \mod n$, 按照 $\gcd(2k, n)$ 的值讨论：

- $\gcd(2k, 30) = 2$ 时，满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^2，相应的变换有 8 个.
- $\gcd(2k, 30) = 6$ 时，满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^4，相应的变换有 4 个.
- $\gcd(2k, 30) = 10$ 时，满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^6，相应的变换有 2 个.
- $\gcd(2k, 30) = 30$ 时，满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^{16}，相应的变换有 1 个.

非等价方案数 $\frac{1}{30} \times (8 \times 2^2 + 4 \times 2^4 + 2 \times 2^6 + 1 \times 2^{16}) = 2192$.

(2) 轮换指数

$$P_G(z_1,\cdots,z_n)=\frac{1}{p^2}(z_1^{p^2}+(p-1)z_p^p+(p^2-p)z_{p^2}).$$

标记奇数标号为 x, 代入 $z_k=2+x^k$, 得到

$$A(x)=\frac{(2+x)^{p^2}+(p-1)(2+x^p)^p+(p^2-p)(2+x^{p^2})}{p^2}.$$

这是一个生成函数 $A(x)=\sum_i a_i x^i$, 其中 a_i 表示有 i 个奇数标号的非等价标号方案数. 题目所求的是所有偶数下标项 a_{2i} 的和.

偶数下标项的和等于 $\frac{A(1)+A(-1)}{2}$. 故非等价标号数为

$$\frac{3^{p^2}+1^{p^2}+(p-1)3^p+(p-1)1^p+(p^2-p)3+(p^2-p)1}{2p^2}=\frac{3^{p^2}+(p-1)3^p+4p^2-3p}{2p^2}.$$

(3) 不考虑旋转，记长度为 n 的圈上相邻两点标号不同的标号方案数为 f_n. 那么

$$f_1=C, f_2=C(C-1), f_n=C(C-1)^{n-1}-f_{n-1}\ \forall n\geq 3.$$

展开 $f_n(n\geq 3)$ 有

$$f_n=C\sum_{k=1}^{n-1}(C-1)^{n-k}(-1)^{k+1}=(C-1)^n+(-1)^n(C-1).$$

由 Burnside 引理，按照 $\gcd(k,n)$ 的值讨论 $g(x)=x+k \mod n$ 的不动点个数：

- $\gcd(k,n)=1$ 时, 满足条件的不动点个数为 0，相应变换个数为 $\phi(n)$.
- $\gcd(k,n)=m\neq 1$ 时, 满足条件的不动点个数为 f_m，相应变换个数为 $\phi(\frac{n}{m})$.

gcd	#合法不动点	# g
1	0	8
2	$(C-1)^2+(C-1)$	8
3	$(C-1)^3-(C-1)$	4
5	$(C-1)^5-(C-1)$	2
6	$(C-1)^6+(C-1)$	4
10	$(C-1)^{10}+(C-1)$	2
15	$(C-1)^{15}-(C-1)$	1
30	$(C-1)^{30}+(C-1)$	1

因此，非等价标记方案数为

$$\frac{1}{30}(x^{30}+x^{15}+2x^{10}+4x^6+2x^5+4x^3+8x^2+8x),\text{ 其中}x=C-1.$$

(4) 类似 (2)，标记模 $C-1$ 余数为 a 的标号为 x^a，那么 $z_k = 2 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(C-2)k}$. 代入轮换指数 P_G 可得到 x 的多项式 $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$，非等价标号方案数即所有 $x^{(C-1)k}(k \geq 0)$ 的系数和.

设 $w_n^{(1)}, w_n^{(2)}, \cdots, w_n^{(n)}$ 是 $x^n = 1$ 的 n 个根. 那么

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{n} \left(w_n^{(i)}\right)^k = n \times \mathbf{1}[k \mod n = 0],$$

$$A(x)\text{中}x^{(C-1)k}(k \geq 0)\text{的系数和} = \frac{1}{C-1} \sum_{i=1}^{C-1} A(w_{C-1}^{(i)}).$$

代入 $A(x) = \frac{1}{n}\left[\left(2 + x + x^2 + \cdots + x^{(C-2)}\right)^n + (n-1)\left(2 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{(C-2)n}\right)\right]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{C-1} A(w_{C-1}^{(i)}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{C-1} \left(\sum_{k=1}^{C-2} \left(w_{C-1}^{(i)}\right)^k + 2\right)^n + \frac{(n-1)}{n} \sum_{i=1}^{C-1} \left(\sum_{k=1}^{C-2} \left(w_{C-1}^{(i)}\right)^{kn} + 2\right) \\
&= \frac{C^n + (C-2) \cdot 1^n}{n} + \frac{(n-1)}{n} \left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2} \left(\sum_{i=1}^{C-1} (w_{C-1}^{(i)})^{kn}\right)\right) && (*) \\
&= \frac{C^n + (C-2)}{n} + \frac{(n-1)}{n} \left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2} \mathbf{1}[kn \mod C-1 = 0]\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1) + (n-1)^2], & C-1 = qn, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1)], & \text{其他情况} \end{cases} && (**)
\end{aligned}$$

故

$$\text{非等价方案数} = \begin{cases} \frac{1}{(C-1)n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1) + (n-1)^2], & C-1 = qn, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{(C-1)n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1)], & \text{其他情况} \end{cases}$$

注：由 $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$,

$\forall w_n^{(i)} \neq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \left(w_n^{(i)}\right)^k = 0$，于是 (*) 式成立.

当 $C - 1 = qn$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{C-2} \mathbf{1}[kn \mod qn = 0] \\
=&\sum_{k=1}^{C-2} \mathbf{1}[k \mod q = 0] && (\text{由 } n \text{ 为质数，等号成立}) \\
=&\lfloor \frac{C-2}{q} \rfloor && (\text{相当于问 } 1 \cdots, C-2 \text{ 中 } q \text{ 倍数的个数}) \\
=&\frac{C-1}{q} - 1 \\
=&n - 1.
\end{aligned}$$