计数，概率

请在 11 月 21 日课前提交纸质作业.

1. (4 分) $\mathbb{F}$ 是有限域, 证明 $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 是循环群.

   提示：可以利用 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

2. (4 分) 定义 $R_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{k} 2^{-k}$. 化简 R_n 的表达式.

3. (4 分) 定义 $R_n = \sum_{k\leq n} \binom{n-k}{k} (-1)^k$. 化简 R_n 的表达式.

4. (6 分) 每一个置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 都可以写成若干不交的轮换.

   (1) 对任意 $k > n/2$, 问有多少个置换包含长度恰好为 k 的轮换.

   (2) 对任意 $\alpha > 1/2$, 对一个随机的置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 包含一个长度至少为 αn 的轮换的概率大概是多少. 这里假设 n 充分大.

   注. *(这往往会被包装为以下问题.)* 监狱中有 n 位囚犯. 现在让他们进行如下游戏. 在房间里布置标号 $1, \ldots, n$ 的 n 个柜子，其中分别写有 n 个囚犯的名字. 每个囚犯分别被带到房间中, 允许打开其中至多 αn 个柜子. 如果所有囚犯都找到了包含自己名字的柜子, 那么所有囚犯都被释放. 否则, 所有囚犯都被处死. 游戏开始后囚犯之间不能交流. 请问囚犯应该采取怎样的策略.

5. (6 分) 用 $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ 表示期望为 λ 的泊松分布. 随机变量 X 服从柏松分布, 记为 $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, 当且仅当 $\forall k \in \mathbb{N}, \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

   (1) 如果独立的随机变量 X, Y 分别服从 $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1)$，$Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_2)$，定义另一个随机变量 $Z = X + Y$. 证明 $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   (2) 随机变量 X, Y, Z 的定义和上一文相同. 求已知 Z 时，X 的条件分布. 具体来说，对任意 $n, k \in \mathbb{N}$，计算 $\Pr[X = k | Z = n]$.

6. (4 分) 有一族相关事件 $E_1, \ldots, E_{2024}$，满足 $\Pr[E_i] = \frac{1}{2}, \Pr[E_i \wedge E_j] = \frac{1}{3}, \ldots$. 更一般地，对任意非空的 $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2024\}$，$\Pr[\bigwedge_{i\in S} E_i] = \frac{1}{|S|+1}$. 计算 $\Pr[\bigvee_{i=1}^{2024} E_i]$.