计数，概率

参考答案

1. (4 分) $\mathbb{F}$ 是有限域, 证明 $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 是循环群.

   提示：可以利用 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

   解　记 $q = |\mathbb{F}|$. 只需证明 $\mathbb{F}^*$ 中存在阶为 $q-1$ 的元素. 任意元素的阶一定是 $q-1$ 的因数. 对每个因数 $d|q-1$, 我们数一下 $\mathbb{F}^*$ 中中 d 阶元的个数 n_d.

   每个 d 阶元都是 $x^d = 1$ 的一个根. 假设存在 d 阶元 ω, 那么 $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{d-1}$ 是 $x^d = 1$ 的所有根. 这些根并不都是 d 阶元. 如果 $\gcd(i, d) > 1$, 那么 $(\omega^i)^{d/\gcd(i,d)} = 1$. 因此 $n_d \le \varphi(d)$. 两边同时对 d 求和

   $$\sum_{d|q-1} n_d \le \sum_{d|q-1} \varphi(d).$$

   注意到两边都等于 $q-1$. 因此原不等式是紧的, $n_d = \varphi(d)$.

2. (4 分) 定义 $R_n = \sum_{k\ge 0} \binom{n+k}{k} 2^{-k}$. 化简 R_n 的表达式.

   解　$R_0 = \sum_{k\ge 0} 2^{-k} = 1$.

   $$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k\ge 0} \binom{n+k}{k} 2^{-k} \\ &= \sum_{k\ge 0} \binom{n+k-1}{k-1} 2^{-k} + \sum_{k\ge 0} \binom{n+k-1}{k} 2^{-k} \\ &= \sum_{k\ge 0} \binom{n+k}{k} 2^{-k-1} + R_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} R_n + R_{n-1}. \end{aligned}$$

   因此 $R_n = 2R_{n-1} = 2^{n+1}$.

   另一种解法: 不停扔均匀硬币, 直到扔出 $n+1$ 个反面才停止. 停止前扔出了 k 个正面的概率是 $\binom{n+k}{k}/2^{n+k+1}$. 因此 $\sum_k \binom{n+k}{k}/2^{n+k+1} = R_n/2^{n+1} = 1$.

3. (4 分) 定义 $R_n = \sum_{k\le n} \binom{n-k}{k} (-1)^k$. 化简 R_n 的表达式.

   解　$R_0 = R_1 = 1$.

   $$\begin{aligned} R_n = \sum_k \binom{n-k}{k} (-1)^k &= \sum_k \binom{n-k-1}{k} (-1)^k + \sum_k \binom{n-k-1}{k-1} (-1)^k \\ &= \sum_k \binom{n-k-1}{k} (-1)^k + \sum_k \binom{n-k-2}{k} (-1)^{k+1} = R_{n-1} - R_{n-2}. \end{aligned}$$

根据递推公式, 不难验证, 数列是 $1, 1, 0, -1, -1, 0$ 的循环.

$$R_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 0, 1 \mod 6 \\ 0, & \text{if } i = 2, 5 \mod 6 \\ -1, & \text{if } i = 3, 4 \mod 6 \end{cases}$$

4. (6 分) 每一个置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 都可以写成若干不交的轮换.

 (1) 对任意 $k > n/2$, 问有多少个置换包含长度恰好为 k 的轮换.

 (2) 对任意 $\alpha > 1/2$, 对一个随机的置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 包含一个长度至少为 αn 的轮换的概率大概是多少. 这里假设 n 充分大.

注. *(这往往会被包装为以下问题.)* 监狱中有 n 位囚犯. 现在让他们进行如下游戏. 在房间里布置标号 $1, \ldots, n$ 的 n 个柜子, 其中分别写有 n 个囚犯的名字. 每个囚犯分别被带到房间中, 允许打开其中至多 αn 个柜子. 如果所有囚犯都找到了包含自己名字的柜子, 那么所有囚犯都被释放. 否则, 所有囚犯都被处死. 游戏开始后囚犯之间不能交流. 请问囚犯应该采取怎样的策略.

解

 (1) 对置换 g 和元素 i, 要求 g 包含一个长度为 k 的轮换且 i 在轮换中. 这样的 (g, i) 对有

$$\underbrace{n}_{i\text{ 的选择}} \cdot \underbrace{(n-1)^{\underline{k-1}}}_{i\text{ 所在的轮换}} \cdot \underbrace{(n-k)!}_{\text{剩下 } n-k \text{ 元素的置换}} = n! \text{ 个}.$$

 每个包含 k 轮换的置换对应了 k 个 (g, i) 对, 因此数目为 $n!/k$.

 (2) 概率为

$$\sum_{k \in [\alpha n, n]} \frac{n!/k}{n!} = \sum_{k \in [\alpha n, n]} \frac{1}{k} = H_n - H_{\alpha n} \approx \ln(1/\alpha).$$

5. (6 分) 用 $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ 表示期望为 λ 的泊松分布. 随机变量 X 服从柏松分布, 记为 $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, 当且仅当 $\forall k \in \mathbb{N}, \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

 (1) 如果独立的随机变量 X, Y 分别服从 $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_2)$, 定义另一个随机变量 $Z = X + Y$. 证明 $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

 (2) 随机变量 X, Y, Z 的定义和上一文相同. 求已知 Z 时, X 的条件分布. 具体来说, 对任意 $n, k \in \mathbb{N}$, 计算 $\Pr[X = k | Z = n]$.

解

(1) 我们有如下计算:

$$\begin{aligned}
\Pr[Z=k] &= \sum_{i=0}^{k}\Pr[X=i,Y=k-i]\\
&= \sum_{i=0}^{k}\Pr[X=i]\Pr[Y=k-i]\\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{k!}.
\end{aligned}$$

因此 $Z\sim\mathrm{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$.

(2) 首先，当 $n<k$，$\Pr[X=k|Z=n]=0$，对于其他情况，我们有如下计算:

$$\begin{aligned}
\Pr[X=k|Z=n] &= \frac{\Pr[X=k,Y=n-k]}{\Pr[Z=n]}\\
&= \frac{\Pr[X=k][Y=n-k]}{\Pr[Z=n]}\\
&= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\left(\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\right)^{-1}\\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

这是一个二项分布.

6. (4 分) 有一族相关事件 $E_1,\ldots,E_{2024}$，满足 $\Pr[E_i]=\frac{1}{2},\Pr[E_i\wedge E_j]=\frac{1}{3},\ldots.$ 更一般地，对任意非空的 $S\subseteq\{1,2,\ldots,2024\}$，$\Pr[\bigwedge_{i\in S}E_i]=\frac{1}{|S|+1}$. 计算 $\Pr[\bigvee_{i=1}^{2024}E_i]$.

解 2024/2025.

对任意 $n\geq 1$，根据容斥原理，

$$\begin{aligned}
\Pr\Big[\bigvee_{i=1}^{n}E_i\Big] &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{S\subseteq[n],|S|=j}\Pr\Big[\bigwedge_{i\in S}E_i\Big]\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}\frac{1}{j+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{1}{n}\binom{n+1}{j+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}-\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(0-\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}\right)=\frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$