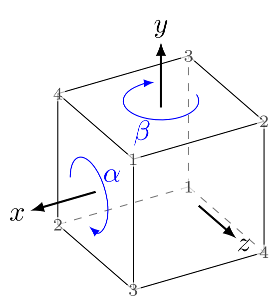
群论

请在 10 月 24 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 给定群 G，定义它的换位子（commutator subgroup）G' 为 $\langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\rangle$.
   (1) 证明：$G' \trianglelefteq G$.
   (2) 考虑 $N \trianglelefteq G$，证明：G/N 是 Abel 群当且仅当 $G' \le N$.
   (3) 考虑 Sym(4)，即 $\{1,2,3,4\}$ 上的对称群，请给出一个序列：
   $$S_4 = G^0 \triangleright G^1 \triangleright \cdots \triangleright G^n = \{1\},$$
   满足 G^i/G^{i+1}（$i = 0, \ldots, n-1$）是 Abel 群.

2. (10 分) 给定一个正方体，按照某种特定方式对它整体旋转（即特殊正交变换，可以保角度的旋转，但没有镜面操作）的时候，它会与原来的正方体重合，尽管点和面可能换了位置. 以正方体的中心为原点，沿着正方体的边建立 x 轴（左右方向）、y 轴（上下方向）和 z 轴（前后方向），正方体的“基本旋转”恰好就是顺时针沿着 x 轴或 y 轴转九十度，记为 α, β. 可以证明，保持正方体占位不变的旋转都是由这两种旋转生成的，因此正方体的旋转构成了一个群，记为 R.
   (1) 证明：$R \cong \mathrm{Sym}(4)$，因此 Sym(4) 可以被视为正方体的旋转群.
   提示：对正方体的顶点编号 $1, 2, 3, 4$，并且对径点编上相同的号，这样一来，每一个面的顶点都恰好具有四个编号，考虑底面的编号，给出 α, β 所对应的 Sym(4) 中的元素，证明他们生成了 Sym(4).
   (2) 写出 Sym(4) 的类方程（class equation），并解释它的几何意义（即每个共轭类对应的旋转类型）.



3. (10 分) 若 $N \triangleleft G$，考虑商群 G/N，并考虑自然映射 $\eta : G \to G/N$，$\eta(g) = gN$. 若 $K' \triangleleft H' \triangleleft G/N$. 定义
$$H = \eta^{-1}(H') = \{g \in G \mid \eta(g) \in H'\},$$
$$K = \eta^{-1}(K') = \{g \in G \mid \eta(g) \in K'\}.$$
证明:

(1) H, K 是群且 $N \triangleleft K \triangleleft H \triangleleft G$.

(2) $H/K \cong H'/K'$.

4. (10 分) 设 $N \trianglelefteq G$，$|N| = n$，$[G : N] = m$

(1) 设 $g \in G$ 且 $\gcd(\mathrm{order}(g), m) = 1$. 证明 $g \in N$.

(2) 设 m 和 n 互素. 证明，N 是 G 的唯一的大小为 n 的正规子群.

5. (10 分) 设 G 是一个 15 阶群.

(1) 证明 G 有阶分别为 3 和 5 的正规子群.

(2) 证明 G 是循环群.

提示：需要使用 Sylow 第三定理：若 $|G| = p^k m$（p 为素数，$m > 0$，$\gcd(p, m) = 1$），记 Sylow p-子群的数目为 n_p，那么 $n_p \mid m$ 且 $n_p \equiv 1 \pmod p$.