一阶逻辑，ZFC 集合论，Gödel 不完备定理

请在 10 月 10 日课前提交纸质作业.

1. (15 分) 考虑一阶逻辑，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$，这里，P_{ij} 是有 i 个元的谓词中的第 j 个. 例如 P_{22} 就是二元谓词中的第 2 个. 考虑公式 $\phi = \exists x \forall y P_{22}(x, y)$, $\psi = \forall y \exists x P_{22}(x, y)$.
   (1) 用一阶逻辑的自然演绎（有 $\forall I, \forall E$ 规则，“$\exists$” 是 “$\neg\forall\neg$” 的简记）推导出 $\vdash \phi \to \psi$.
   (2) 证明：$\phi \to \psi$ 是有效的，即对于任意解释 I，都有 $I \vDash \phi \to \psi$.
   (3) 给一个语义解释 I，说明 $\psi \to \phi$ 不是有效的.

2. (10 分) 考虑 ZFC 集合论，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$ 以及 $\in, =$.
   (1) “存在且唯一” 的符号是 $\exists!$，请用 ZFC 公式给出它的定义. 也就是说，给一个公式 $\phi(x, A)$，使得 $\phi(x, A)$ 表示 $\exists! x A(x)$，读作 “存在唯一的 x 使 $A(x)$ 成立”.
   (2) 利用第一问的记号，给出二元关系 R 是从集合 X 到集合 Y 的函数关系的 ZFC 公式定义.
   提示：第二问的公式中允许使用集合论的常用符号，例如交 $\cap$、并 $\cup$、包含 $\subseteq$、笛卡尔积 $\times$、序对 (x, y)、子集符号 $\{x \in X : \phi(x)\}$，幂集符号 2^X 等.

3. (15 分) 考虑 ZFC 集合论，本题讨论正则公理.
   (1) 证明，不存在一对互相包含的集合 x, y. 即证明 $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$.
   (2) 证明，不存在一列集合 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ 满足 $\forall i \in \mathbb{N}, x_{i+1} \in x_i$.
   (3) 在保留 ZFC 中其它公理的前提下，证明前一问的命题可以推出正则公理.

4. (5 分) 在这个问题中，我们试图构造一个比 ZFC 更近完备的形式系统.

   令 Ω 表示 ZFC 使用的字母表允许出现的所有不含自由变量的合式公式（well-formed formula），可以写为 $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

   用以下方式递归定义 T_i, F_i, Γ_i：

   - 令 T_0 表示所有 ZFC 可以推理演绎得到的命题. 令 $F_0 := \{\text{“}\varphi\text{”} | \text{“}\neg\varphi\text{”} \in T_0\}$ 表示 T_0 中命题的否命题，也就是 ZFC 可以“否定”的命题. 根据 Gödel 的不完备定理，我们知道或者 $T_0 \cap F_0 \neq \varnothing$ (不一致)，或者 $T_0 \cup F_0 \not\supseteq \Omega$ (不完备).
   - 令 $\Gamma_0 = \varnothing$.
   - 如果 $\varphi_i \in T_{i-1} \cup F_{i-1}$，那么定义 $T_i := T_{i-1}, F_i := F_{i-1}, \Gamma_i := \Gamma_{i-1}$.
   - 如果 $\varphi_i \notin T_{i-1} \cup F_{i-1}$，那么定义 $\Gamma_i := \Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$. 令 T_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以推理演绎得到的命题. 令 F_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以“否定”的命题.

   不难看出，$T_i \supseteq T_{i-1}, F_i \supseteq F_{i-1}, \Gamma_i \supseteq \Gamma_{i-1}$ 并且 $T_{i-1} \cap F_{i-1} = \varnothing \implies T_i \cap F_i = \varnothing$. 令 $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$. 那么 $T = \bigcup_i T_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以推理演绎得到的命题，$F = \bigcup_i F_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以“否

定” 的命题. 且 $T \cup F \supseteq \Omega$. 也就是说，如果把 Γ 中的命题都作为公理加入 ZFC，可以在不破坏一致性的同时获得完备性.

判断上述结论是否违反了 Gödel 不完备定理. 如果是，请指出证明中的错误. 如果否，请解释.