一阶逻辑，ZFC 集合论，Gödel 不完备定理

参考答案

1. (15 分) 考虑一阶逻辑，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$，这里，P_{ij} 是有 i 个元的谓词中的第 j 个. 例如 P_{22} 就是二元谓词中的第 2 个. 考虑公式 $\phi = \exists x \forall y P_{22}(x, y)$, $\psi = \forall y \exists x P_{22}(x, y)$.
   (1) 用一阶逻辑的自然演绎（有 $\forall I, \forall E$ 规则，“$\exists$” 是 “$\neg\forall\neg$” 的简记）推导出 $\vdash \phi \to \psi$.
   (2) 证明：$\phi \to \psi$ 是有效的，即对于任意解释 I，都有 $I \vDash \phi \to \psi$.
   (3) 给一个语义解释 I，说明 $\psi \to \phi$ 不是有效的.

解

(1) 证明树如下：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x, \neg P_{22}(x,y)]_1}{\neg P_{22}(x,y)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{[\forall y P_{22}(x,y)]_2}{P_{22}(x,y)}\,(\forall E)}{\bot}\,(\to E)}{\neg \forall y P_{22}(x,y)}\,(\mathrm{RAA}_2)}{\forall x, \neg\forall y P_{22}(x,y)}\,(\forall I) \qquad [\neg\forall x \neg\forall y P_{22}(x,y)]_3}{\bot}\,(\to E)}{\neg\forall x \neg P_{22}(x,y)}\,(\mathrm{RAA}_1)}{\forall y \neg\forall x \neg P_{22}(x,y)}\,(\forall I)}{\phi \to \psi}\,(\to I_3)
$$

(2) 我们证明，只要 $I \vDash \phi$，就有 $I \vDash \psi$. 假设 I 的论域（domain）是 D，P_{22} 的解释是 $\bar{P}_{22}$. $I \vDash \phi$ 的时候，存在一个元素 $a \in D$，对于任意 $b \in D$ 都成立 $\bar{P}_{22}(a, b)$. 因此，任意 $b \in D$，都存在不依赖于 b 的 $a \in D$ 使得 $\bar{P}_{22}(a, b)$ 为真. 这就证明了 $I \vDash \psi$.

(3) 例如，论域为 $\mathbb{R}$，$P_{22}(x, y)$ 的解释为 $x = y$. 取 $x = y$，显然有 $I \vDash \psi$，然而，并不存在一个元素 $x \in \mathbb{R}$ 等于所有的 y.

注. 这题旨在说明，量词的顺序是非常重要的，不能随便颠倒.

2. (10 分) 考虑 ZFC 集合论，它的变元是 $x, y, \ldots$，谓词是 $P_{11}, P_{12}, \ldots$ 以及 $\in, =$.
   (1) “存在且唯一” 的符号是 $\exists!$，请用 ZFC 公式给出它的定义. 也就是说，给一个公式 $\phi(x, A)$，使得 $\phi(x, A)$ 表示 $\exists! x A(x)$，读作“存在唯一的 x 使 $A(x)$ 成立”.
   (2) 利用第一问的记号，给出二元关系 R 是从集合 X 到集合 Y 的函数关系的 ZFC 公式定义.
   提示：第二问的公式中允许使用集合论的常用符号，例如交 $\cap$、并 $\cup$、包含 $\subseteq$、笛卡尔积 $\times$、序对 (x, y)、子集符号 $\{x \in X : \phi(x)\}$，幂集符号 2^X 等.

解

(1) $\phi(x, A)$ 写作 $\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow (x = y)))$.

(2) $(R \subseteq X \times Y) \wedge \forall x(x \in X \rightarrow (\exists! y(y \in Y \wedge (x, y) \in R)))$.

注. 我们还可以继续简化符号，例如 $\forall x \in A\ P(x)$ 是 $\forall x(x \in A \rightarrow P(x))$ 的缩写；$\exists x \in A\ P(x)$ 是 $\exists x(x \in A \wedge P(x))$ 的缩写.

3. (15 分) 考虑 ZFC 集合论，本题讨论正则公理.

(1) 证明，不存在一对互相包含的集合 x, y. 即证明 $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$.

(2) 证明，不存在一列集合 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ 满足 $\forall i \in \mathbb{N}, x_{i+1} \in x_i$.

(3) 在保留 ZFC 中其它公理的前提下，证明前一问的命题可以推出正则公理.

解

(1) 这题是第二题的特殊情况，因为如果存在，那么我们就可以构造无穷序列 $x \ni y \ni x \ni y \ni \ldots$.

(2) 假设存在 $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ 满足 $x_{i+1} \in x_i$，这个形式上是一个映射 $f : i \mapsto\rightarrow x_i$. 用归纳公理和替换公理模式，可以构造集合 $X = \{x_0, x_1, ...\}$.

这样使用正则公理，X 应当包含一个元素 $z = x_n$ 与自身交为空集. 但是 $x_{n+1} \in (x_n \cap X)$，矛盾. 因此假设不成立，得证.

(3) 假设正则公理不成立，即假设存在集合 A，使得任意 $x \in A$，成立 $x \cap A \neq \varnothing$. 考虑从 A 中取出一个元素 x_1，由于 $x_1 \cap A \neq \varnothing$，所以存在 $x_2 \in x_1 \cap A$.

因为 $x_2 \in A$，所以根据假设，$x_2 \cap A \neq \varnothing$，继续取 $x_3 \in x_2 \cap A \ldots$ 这样就构造了一个序列 $x_1, x_2, ...$ 满足 $x_{i+1} \in x_i$，与 (2) 的命题矛盾. 正则公理得证.

4. (5 分) 在这个问题中，我们试图构造一个比 ZFC 更近完备的形式系统.

令 Ω 表示 ZFC 使用的字母表允许出现的所有不含自由变量的合式公式 (well-formed formula)，可以写为 $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

用以下方式递归定义 T_i, F_i, Γ_i：

- 令 T_0 表示所有 ZFC 可以推理演绎得到的命题. 令 $F_0 := \{\text{“}\varphi\text{”} | \text{“}\neg\varphi\text{”} \in T_0\}$ 表示 T_0 中命题的否命题，也就是 ZFC 可以“否定”的命题. 根据 Gödel 的不完备定理，我们知道或者 $T_0 \cap F_0 \neq \varnothing$ (不一致)，或者 $T_0 \cup F_0 \not\supseteq \Omega$ (不完备).
- 令 $\Gamma_0 = \varnothing$.
- 如果 $\varphi_i \in T_{i-1} \cup F_{i-1}$，那么定义 $T_i := T_{i-1}, F_i := F_{i-1}, \Gamma_i := \Gamma_{i-1}$.
- 如果 $\varphi_i \notin T_{i-1} \cup F_{i-1}$，那么定义 $\Gamma_i := \Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$. 令 T_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以推理演绎得到的命题. 令 F_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以“否定”的命题.

不难看出，$T_i \supseteq T_{i-1}, F_i \supseteq F_{i-1}, \Gamma_i \supseteq \Gamma_{i-1}$ 并且 $T_{i-1} \cap F_{i-1} = \varnothing \implies T_i \cap F_i = \varnothing$. 令 $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$. 那么 $T = \bigcup_i T_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以推理演绎得到的命题，$F = \bigcup_i F_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以 "否定" 的命题. 且 $T \cup F \supseteq \Omega$. 也就是说，如果把 Γ 中的命题都作为公理加入 ZFC，可以在不破坏一致性的同时获得完备性.

判断上述结论是否违反了 Gödel 不完备定理. 如果是，请指出证明中的错误. 如果否，请解释.

解 不违背. Gödel 不完备定理适用于递归可枚举的公理系统，而我们对 Γ 的构造实际上加入了无穷多个公理，并且这些公理并不存在一个递归可枚举的表示方式，所以不违背. 具体而言，我们只是形式上定义了 T_i 和 F_i，然而，Gödel 不完备定理实际上已经指出，我们并不存在一个有效的方法判定一个命题是否可证明，因而这并不是递归可枚举的.

注. 注意，*ZFC* 也是有无穷条公理的，例如子集公理和替换公理，这些公理中的涉及的命题都是不能在一阶逻辑中枚举的，所以他们实际上是公理模式而不是公理. 然而，这些公理模式存在有限的表示方式，因而是递归可枚举的.