

# 自然演绎的完备性

请在 9 月 26 日课前提交纸质作业.

1. (15 分) 考虑只包含连接词  $\rightarrow$  和  $\wedge$  的命题逻辑, 它的自然演绎系统 (natural deduction system) 包括如下内容:

- 命题逻辑的公式, 包括永假常元  $\perp$ .
- 没有公理.
- 推导规则如下:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I \quad \frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

$$\frac{\perp}{\phi} \perp \quad \frac{\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi} \text{RAA}$$

其中, 横线上面是前提, 下面是推导的结果 (结论), 横线右边是规则的名字 (例如  $\wedge I$ ). 省略号表示省略的推导步骤; 方括号表示假设该公式已经推出, 在此基础上进行推理.

我们将  $\phi \rightarrow \perp$  缩写为  $\neg\phi$  (注意,  $\neg$  不属于字符集).

- (1) 证明: 对任意公式  $\psi$  和  $\phi$ ,  $\psi \vdash \phi$  当且仅当  $\vdash \psi \rightarrow \phi$ .
  - (2) 利用自然演绎系统证明  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$ .
  - (3) 利用完全性定理 (completeness theorem) 证明  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$ .
2. (5 分) 考虑通常的命题逻辑自然演绎系统, 作为简化, 连接词只有  $\rightarrow$ , 命题字母的集合为  $P$ . 将推导规则除去 RAA, 我们就得到了直觉主义命题逻辑, 推理符号为  $\vdash_i$ . 本题证明在经典的语义  $\models$  下, 直觉主义命题逻辑是不完全的 (incomplete), 即存在公式  $\phi$ ,  $\models \phi$  但  $\not\vdash_i \phi$ .

为此, 我们将会给一种新的语义  $\Vdash$ . 考虑一个偏序集  $(W, \geq)$ , 每一个  $w \in W$  上都被赋予一些命题字母  $p, q, \dots$ , 由映射  $V: W \rightarrow 2^P$  给出, 满足: 如果  $v \geq w$ , 那么  $V(v) \supseteq V(w)$ . 语义  $\Vdash$  可以被归纳定义为:

- $(W, V, w) \Vdash p$  当且仅当  $p \in V(w)$ .
- $(W, V, w) \Vdash \perp$  永远不成立.
- $(W, V, w) \Vdash \psi \rightarrow \phi$  当且仅当对所有  $v \geq w$ , 如果  $(W, V, v) \Vdash \psi$ , 那么  $(W, V, v) \Vdash \phi$ .

符号  $\vDash_i \phi$  表示  $(W, V, w) \Vdash \phi$  对所有  $W, V, w$  成立.

(1) 证明: 如果  $(W, V, w) \Vdash \phi$  且  $v \geq w$ , 那么  $(W, V, v) \Vdash \phi$ .

(2) 证明一致性 (soundness) 定理: 对任意公式  $\phi$ , 如果  $\vdash_i \phi$ , 那么  $\vDash_i \phi$ .

(3) 证明: 公式  $\phi = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  同时满足  $\vDash \phi$  和  $\nVdash_i \phi$ . 因而在经典语义  $\vDash$  下, 直觉主义命题逻辑是不完全的.

注. 语义  $\vDash_i$  和语法  $\vdash_i$  实际上满足完全性定理: 对任意公式  $\phi$ , 如果  $\vDash_i \phi$ , 那么  $\vdash_i \phi$ .