

自然演绎的完备性

参考答案

1. (15 分) 考虑只包含连接词 \rightarrow 和 \wedge 的命题逻辑, 它的自然演绎系统 (natural deduction system) 包括如下内容:

- 命题逻辑的公式, 包括永假常元 \perp .
- 没有公理.
- 推导规则如下:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \quad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2$$
$$\frac{[\phi] \quad \vdots \quad \psi}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow I \quad \frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$
$$\frac{\perp}{\phi} \perp \quad \frac{[\neg\phi] \quad \vdots \quad \perp}{\phi} \text{RAA}$$

其中, 横线上是前提, 下面是推导的结果 (结论), 横线右边是规则的名字 (例如 $\wedge I$). 省略号表示省略的推导步骤; 方括号表示假设该公式已经推出, 在此基础上进行推理.

我们将 $\phi \rightarrow \perp$ 缩写为 $\neg\phi$ (注意, \neg 不属于字符集).

- (1) 证明: 对任意公式 ψ 和 ϕ , $\psi \vdash \phi$ 当且仅当 $\vdash \psi \rightarrow \phi$.
- (2) 利用自然演绎系统证明 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$.
- (3) 利用完全性定理 (completeness theorem) 证明 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

解

- (1) \implies 由 $\rightarrow I$ 直接得到; \impliedby 由 $\rightarrow E$ 直接得到.
- (2) 假设 ϕ 成立, 那么由 $\rightarrow E$, 我们有 ψ 和 $\neg\psi = \psi \rightarrow \perp$ 成立, 因此由 $\rightarrow E$, \perp 成立, 再由 ϕ 假设的 $\rightarrow I$, $\phi \rightarrow \perp = \neg\phi$ 成立.
- (3) 列真值表:

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi)$	$\neg\phi$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

因此 $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$, 由完全性定理, $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

2. (5 分) 考虑通常的命题逻辑自然演绎系统, 作为简化, 连接词只有 \rightarrow , 命题字母的集合为 P . 将推导规则除去 RAA, 我们就得到了直觉主义命题逻辑, 推理符号为 \vdash_i . 本题证明在经典的语义 \vDash 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的 (incomplete), 即存在公式 ϕ , $\vDash \phi$ 但 $\not\vdash_i \phi$.

为此, 我们将会给一种新的语义 \Vdash . 考虑一个偏序集 (W, \geq) , 每一个 $w \in W$ 上都被赋予一些命题字母 p, q, \dots , 由映射 $V: W \rightarrow 2^P$ 给出, 满足: 如果 $v \geq w$, 那么 $V(v) \supseteq V(w)$. 语义 \Vdash 可以被归纳定义为:

- $(W, V, w) \Vdash p$ 当且仅当 $p \in V(w)$.
- $(W, V, w) \Vdash \perp$ 永远不成立.
- $(W, V, w) \Vdash \psi \rightarrow \phi$ 当且仅当对所有 $v \geq w$, 如果 $(W, V, v) \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

符号 $\vDash_i \phi$ 表示 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 对所有 W, V, w 成立.

- (1) 证明: 如果 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 且 $v \geq w$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.
- (2) 证明一致性 (soundness) 定理: 对任意公式 ϕ , 如果 $\vdash_i \phi$, 那么 $\vDash_i \phi$.
- (3) 证明: 公式 $\phi = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ 同时满足 $\vDash \phi$ 和 $\not\vdash_i \phi$. 因而在经典语义 \vDash 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的.

注. 语义 \vDash_i 和语法 \vdash_i 实际上满足完全性定理: 对任意公式 ϕ , 如果 $\vDash_i \phi$, 那么 $\vdash_i \phi$.

解

(1) 用归纳法, 考虑 ϕ 是如何构造的.

- 假设 $\phi = p$ 或 $\phi = \perp$, 那么根据定义命题即成立.
- 假设 $\phi = \psi \rightarrow \phi$, 那么对所有的 $v' \geq w$, 如果 $(W, V, v') \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, w) \Vdash \phi$. 根据归纳假设, $(W, V, w') \Vdash \phi$ 对所有 $w' \geq w$ 成立, 因而也对 $w' = v$ 成立. 所以, 对所有 $v' \geq v$, 如果 $(W, V, v') \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$ 成立, 这就是在说 $(W, V, v) \Vdash \psi \rightarrow \phi$.

(2) 我们证明更强的结论: 对公式集 Γ , 如果 $\Gamma \vdash_i \phi$, 那么 $\Gamma \vDash_i \phi$. 依然用归纳法, 考虑 $\Gamma \vdash_i \phi$ 是如何得到的.

- 如果 $\phi \in \gamma$, 那么平凡成立.
- 如果是用 $\rightarrow I$ 规则得到的, 那么 $\phi = \alpha \rightarrow \beta$. 根据规则的含义, 将 α 放入 Γ . 考虑任何 W, V, w , 假设 $(W, V, w) \Vdash \alpha$, 由 α 推出了 β , 根据归纳假设, 在这些 w 上会有 $(W, V, w) \Vdash \beta$. 取 $v \geq w$, 我们要证明 $(W, V, v) \Vdash \beta$. 根据第一问, $(W, V, v) \Vdash \beta$, 因此 $(W, V, w) \Vdash \alpha \rightarrow \beta$.
- 如果是用 $\rightarrow E$ 规则得到的, 那么 ϕ 是由 α 和 $\alpha \rightarrow \phi$ 推出的. 根据归纳假设, $\Gamma \Vdash \alpha$ 且 $\Gamma \Vdash \alpha \rightarrow \phi$. 考虑 (W, V, w) 满足 $(W, V, w) \Vdash \Gamma$, 对 $v \geq w$, 假设 $(W, V, v) \Vdash \alpha$, 因为 $(W, V, w) \Vdash \alpha \rightarrow \phi$, 根据定义 $(W, V, w) \Vdash \phi$, 所以 $\Gamma \Vdash \phi$.

- 如果是 \perp 规则得到的, 根据归纳假设, $(W, V, w) \Vdash \perp$, 这与定义矛盾, 所以其实这一规则不会被使用.

(3) 我们需要给出一个模型 (W, V, w) 使得 $(W, V, w) \nVdash \phi$. 考虑模型 $W = \{a, b\}, a \geq b, V(a) = \{p\}, V(b) = \emptyset, w = b$. 容易验证, $(W, V, w) \Vdash \neg\phi$ 当且仅当对所有 $v \geq w, (W, V, v) \nVdash \phi$, 所以 $(W, V, w) \Vdash \neg\neg\phi$ 当且仅当存在 $v \geq w$ 使得 $(W, V, v) \Vdash \phi$. 注意, $(W, V, b) \Vdash \neg\neg p$, 但 $(W, V, a) \nVdash p$, 且 $a \geq b$, 所以这违背了蕴含的语义.

(4) 要证 $\vdash \phi$, 只需要讨论 p, q 的真假情况即可. 若 p 为真, 蕴含的结论部分为真, 因此整个 ϕ 为真; 若 p 为假, 则最里面蕴含的前提为假, 因此, 第二层蕴含的前提为真, 此外, 第二层蕴含的结论 p 为假, 所以第二层蕴含整体为假, 最外层蕴含 (也就是 ϕ) 的前提为假, 所以整体最外层蕴含 ϕ 整体为真.

接下来, 要证 $\nVdash_i \phi$, 根据第二问, 只需要证明 $\nVdash_i \phi$.

下面我们构造一个 W, V, w 使得 $(W, V, w) \nVdash \phi = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.

取 $W = \{w_1, w_2\}, w_1 \geq w_2, V(w_1) = \{p\}, V(w_2) = \emptyset$.

则由于 $(W, V, w_1) \Vdash p, (W, V, w_1) \nVdash q$, 有 $(W, V, w_2) \nVdash (p \rightarrow q)$, 进而 $(W, V, w_2) \Vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p$. 同时, 因为 $p \notin V(w_2)$, 有 $(W, V, w_2) \nVdash p$, 与 $(W, V, w_2) \Vdash (p \rightarrow q) \rightarrow p$ 结合知 $(W, V, w_2) \nVdash \phi$.