朴素集合论与命题逻辑

请在 9 月 19 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 使用自然演绎 (Natural deduction) [1]推出 $(((p \to q) \to p) \to p)$.

2. (5 分) 用 System K[2] 证明 $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$, 也就是要推出 $\Rightarrow ((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$.

3. (10 分) (1) 用自然演绎推导下面两个命题时，哪个需要使用 RAA 规则，哪个不需要使用 RAA 规则?
   - $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$
   - $((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$

   (2) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统，去掉 RAA 规则，但是增加一个公理模式：对于任何命题 ϕ，可以把 $(\neg\neg\phi \to \phi)$ 直接作为公理使用. 证明：$(((p \to q) \to p) \to p)$ 可以被推出.

   (3) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统，去掉 RAA 规则，但是增加一个公理模式：对于任何命题 ϕ, ψ，可以把 $(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$ 直接作为公理使用. 证明：对于任何命题 ϕ，$(\neg\neg\phi \to \phi)$ 可以被推出.

4. (5 分) 考虑两个定义了良序关系的集合 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$，证明：要么 $|S| \leq |T|$，要么 $|T| \leq |S|$.

   提示：对于两个定义了序关系的集合 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$，如果有一个双射 $\pi : S \to T$ 满足

   $$\forall a, b \in S, a \leq_S b \iff \pi(a) \leq_T \pi(b)$$

   那么我们称 π 是 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$ 之间的序同构（order isomorphism）.

   提示：对于任意 $s \in S$, $t \in T$，定义集合 S_s, T_t 为

   $$S_s = \{a \in S | a <_S s\}, \qquad T_t = \{b \in T | b <_T t\}.$$

   考虑 $(S_s, \leq_S), (T_t, \leq_T)$ 之间是否存在序同构.

   注意到，假如我们使用选择公理，那么任何集合都有良序. 这题说明选择公理蕴含了集合之间的势可以比较.

[1]使用没有 $\neg$ 和 $\vee$ 的简化版. 参见 Logic and Structure 第 2.4 节.

[2]参见 Sequents and Trees 第 1.2.2 节.