朴素集合论与命题逻辑

参考答案

1. (10 分) 使用自然演绎 (Natural deduction) [1]推出 $(((p \to q) \to p) \to p)$.

解

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[p \to \bot]_2$}
\AxiomC{$[p]_3$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot)$}
\UnaryInfC{q}
\RightLabel{$(\to I_3)$}
\UnaryInfC{$p \to q$}
\AxiomC{$[(p \to q) \to p]_1$}
\RightLabel{$(\to E)$}
\BinaryInfC{p}
\RightLabel{$(\to E, \text{结合}[p \to \bot]_2)$}
\UnaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(RAA_2)}
\UnaryInfC{p}
\RightLabel{$\to I_1$}
\UnaryInfC{$((p \to q) \to p) \to p$}
\end{prooftree}
$$

2. (5 分) 用 System K[2] 证明 $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$, 也就是要推出 $\Rightarrow ((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$.

解

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg q, p \Rightarrow p$}
\RightLabel{$(\Rightarrow \neg)$}
\UnaryInfC{$\neg q \Rightarrow \neg p, p$}
\AxiomC{$q \Rightarrow \neg p, q$}
\RightLabel{$(\neg \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$q, \neg q \Rightarrow \neg p$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$(p \to q), \neg q \Rightarrow \neg p$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$(p \to q) \Rightarrow (\neg q \to \neg p)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$}
\end{prooftree}
$$

3. (10 分) (1) 用自然演绎推导下面两个命题时，哪个需要使用 RAA 规则，哪个不需要使用 RAA 规则?

   - $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$
   - $((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$

   (2) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统，去掉 RAA 规则，但是增加一个公理模式：对于任何命题 ϕ，可以把 $(\neg\neg\phi \to \phi)$ 直接作为公理使用．证明：$(((p \to q) \to p) \to p)$ 可以被推出.

   (3) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统，去掉 RAA 规则，但是增加一个公理模式：对于任何命题 ϕ, ψ，可以把 $(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$ 直接作为公理使用．证明：对于任何命题 ϕ，$(\neg\neg\phi \to \phi)$ 可以被推出.

[1]使用没有 $\neg$ 和 $\vee$ 的简化版. 参见 Logic and Structure 第 2.4 节.

[2]参见 Sequents and Trees 第 1.2.2 节.

解

(1) 第一个不需要 RAA 规则，第二个需要，推导如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p\to q]_1 \qquad [p]_2}{q}\,(\to E) \qquad [q\to\bot]_3}{\bot}\,(\to E)}{p\to\bot}\,(\to I_2)}{(q\to\bot)\to(p\to\bot)}\,(\to I_3)}{(p\to q)\to((q\to\bot)\to(p\to\bot))}\,(\to I_1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(q\to\bot)\to(p\to\bot)]_1 \qquad [q\to\bot]_2}{p\to\bot}\,(\to E) \qquad [p]_3}{\bot}\,(\to E)}{q}\,(\mathrm{RAA}_2)}{p\to q}\,(\to I_3)}{(q\to\bot)\to(p\to\bot)\to(p\to q)}\,(\to I_1)$$

(2) 我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\to q)\to p]_1 \qquad \dfrac{[p\to\bot]_2}{p\to q}}{p}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E, \text{结合}[p\to\bot]_2)}{(p\to\bot)\to\bot}\,(\to I_2) \qquad ((p\to\bot)\to\bot)\to p\ (\text{公理})}{p}\,(\to E)}{((p\to q)\to p)\to p}\,(\to I_1)$$

(3) 我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\to\bot)\to\bot]_1 \qquad [p\to\bot]_2}{\bot}\,(\to E)}{p}\,(\bot)}{(p\to\bot)\to p}\,(\to I_2) \qquad ((p\to\bot)\to p)\to p\ (\text{公理})}{p}\,(\to E)}{((p\to\bot)\to\bot)\to p}\,(\to I_1)$$

4. (5 分) 考虑两个定义了良序关系的集合 $(S,\le_S),(T,\le_T)$，证明：要么 $|S|\le|T|$，要么 $|T|\le|S|$.

提示：对于两个定义了序关系的集合 $(S,\le_S),(T,\le_T)$，如果有一个双射 $\pi:S\to T$ 满足

$$\forall a,b\in S, a\le_S b \iff \pi(a)\le_T \pi(b)$$

那么我们称 π 是 $(S,\le_S),(T,\le_T)$ 之间的序同构（order isomorphism）.

提示：对于任意 $s\in S$, $t\in T$，定义集合 S_s,T_t 为

$$S_s=\{a\in S|a<_S s\},\qquad T_t=\{b\in T|b<_T t\}.$$

考虑 $(S_s,\le_S),(T_t,\le_T)$ 之间是否存在序同构.

注意到，假如我们使用选择公理，那么任何集合都有良序. 这题说明选择公理蕴含了集合之间的势可以比较.

解 首先我们按照提示定义序同构，并把 S 和 T 序同构简记为 $S \sim T$. 易知 "$\sim$" 是等价关系，即具有对称性和传递性.

引理 1. 设 π 是 $S \to S$ 的序同构，则对任意 $x \in S$，成立 $x \leq f(x)$.

证明. 用反证法. 若 $A = \{x \in S | x > \pi(x)\} \neq \varnothing$，则根据 S 的良序性，存在 A 的最小元 a. 因为 $a \in A$，所以 $\pi(a) < a$，由序同构的定义，知 $\pi(\pi(a)) < \pi(a)$. 因此应有 $\pi(a) \in A$，然而 $\pi(a) < a$，与 a 是 A 中最小元矛盾. □

接下来，我们引入前段 (initial segment) 的概念. 对于良序集 $(S, \leq_S)$，定义集合 $S_s = \{a \in S | a <_S s\}$，这样的 S_s 被称为 S 的前段.

引理 2. 对于良序集 $(S, \leq_S)$，S 与任意一个前段不序同构.

证明. 用反证法. 设 π 是 S 到 S_s 的序同构，则由引理1，$s \leq \pi(s)$，而 $\pi(s) \in S_s$ 意味着 $s > \pi(s)$，矛盾. □

接下来，我们用这两个引理，可以完全刻画良序集之间的关系. 这一定理结合集合势大小的定义，直接可以得到要么 $|S| \leq |T|$，要么 $|T| \leq |S|$，因而完成了全部证明.

定理 1. 对于良序集 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$，以下至少一种情况成立：

- S 和 T 之间存在序同构；
- 存在 $s \in S, S_s$ 与 T 之间存在序同构；
- 存在 $t \in T, T_t$ 与 S 之间存在序同构.

证明. 设 $f = \{(s,t) | s \in S, t \in T, S_s \text{ 和 } T_t \text{ 之间存在序同构}\}$. 我们现在来证明，$f$ 是一个序同构，并且要么 S 是定义域，要么 T 是值域.

首先证明 f 的确是一一对应的. 如果 $(s,t_1),(s,t_2) \in f$，那么

$$T_{t_1} \sim S_s \sim T_{t_2}.$$

由引理2 知必须有 $t_1 = t_2$. 这意味着 f 代表了一个从 $S' \subseteq S$ 到 $T' \subseteq T$ 的双射 $\hat{f}$.

然后我们证明，f 保持序关系. 考虑 $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in f, s_1 <_S s_2$，我们需要证明 $t_1 <_T t_2$. 假设序同构 $\pi : S_{s_2} \to T_{t_2}$，则考虑限制 π 的定义域在 S_{s_1} 上，考察此时的值域

$$\begin{aligned}\pi(S_{s_1}) &= \{\pi(x) | x \in S_{s_1}\} \\ &= \{\pi(x) | x <_S s_1\} \\ &= \{\pi(x) | \pi(x) <_T \pi(s_1)\} \\ &= T_{\pi(s_1)}.\end{aligned}$$

因此将 π 的定义域限制在 S_{s_1} 上，会得到一个 $S_{s_1} \to T_{\pi(s_1)}$ 的序同构. 那么 $(s_1, \pi(s_1)) \in f$，结合前面一一对应的性质，有 $\pi(s_1) = t_1$. 同时，根据前段的定义，$S_{s_1} \subsetneq S_{s_2}$，根据 π 的定义，$T_{\pi(s_1)} \subsetneq T_{t_2}$，因此 $\pi(s_1) <_T t_2$. 这意味着 $t_1 <_T t_2$.

这样一来，$\hat{f}$ 构成了 $S' \to T'$ 的序同构.

上面的过程其实证明了更强的结论：对任意 $s_1 <_S s_2$，$(s_2, t_2) \in f$，有 $s_1 \in S'$. 因此，S' 是 S 的前段或 $S' = S$，同理 T' 是 T 的前段或 $T' = T$.

如果 $S' = S$ 或 $T' = T$，直接得证；否则，假设 $S' = S_{s^*}$，$T' = T_{t^*}$，那么 $\hat{f}$ 的存在说明了 (s^*, t^*) 符合 f 的定义，因而 $(s^*, t^*) \in f$，与 $s^* \notin S'$ 和 $t^* \notin T'$ 矛盾. $\square$